Primitives et Intégrales en BAC Pro Industriel

Activité préparatoire

On sait calculer des surfaces depuis longtemps en mathématiques, vous savez depuis la sixième calculer les surfaces usuelles d'un carré, d'un cercle, etc, etc...
Mais quand est il si la surface ce complique ?
(dessiner une façade de gymnase moderne)

1 Primitive d'une fonction

1.1 Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque, pour tout x de I, $F^{'}(x) = f(x)$
Remarque : cette définition n'est vraie que si la fonction f est continue sur I. (on ne lève pas le crayon de sa feuille...)
Exemple :
La fonction f telle que $f(x) = x$ définie sur $\mathbb{R}$ admet pour primitive une fonction F telle que $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$, car $F^{'}(x) = x$.

1.2 Ensemble des primitives d'une fonction

Soit F une primitive de f sur un intervalle I. G est une autre primitive de f sur I si et seulement si il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) + K$.
Traduction : on peut ajouter une constante derrière une primitive, cela ne change rien.
On reprend l'exemple de 1.1 et si on dérivre $G(x) = \dfrac{x^2}{2} + 6$, on retrouve bien $f(x)$.

1.3 Calcul pratiques de primitives

On résume ce que l'on doit connaître ou savoir retrouver dans le formulaire dans le tableau ci-dessous :

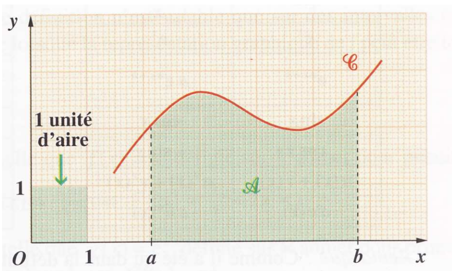
Fonction f	Primitive F
a	$ax+K$
x	$\frac{1}{2}x^2+K$
x^2	$\frac{1}{3}x^3+K$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+K$
$\frac{1}{x}$	$ln(x)+K$
e^x	e^x+K
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}.e^{ax+b}+K$
$cos(x)$	$sin(x)+K$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b)+K$
$sin(x)$	$-cos(x)+K$
$sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}cos(ax+b)+K$
$u(x)+v(x)$	$U(x)+V(x)$
$a.u(x)$	$a.U(x)$

Exemples :

- Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x+5}$ est F telle que $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+5}$. L'ensemble des primitives de f est défini par $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+5}+K$ avec $K\in\mathbb{R}$
- L'ensemble des primitives de h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=5x^2-3x+4$ est définie par $H(x)=\frac{5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x+K$. Si on donne comme condition que $H(0)=0$, il vient que $K=0$.

2 Calcul intégral

2.1 Calcul d'aires



Soit une fonction f définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et F une de ses primitives, l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est :

$$\mathcal{A}=F(b)-F(a)$$

2.2 Intégrale d'une fonction

Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé *intégrale de f entre a et b.*
Il est noté $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2.3 Conséquences

1. Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle $[a;b]$, l'intégrale de f entre a et b est indépendante du choix de la primitive :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. F, telle que $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, est une primitive de f.

$$\int_2^3 xdx = [\frac{1}{2}x^2]_2^3 = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

2. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a;b]$, alors on a :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, $\int_0^4 xdx = [\frac{1}{2}x^2]_0^4 = 8$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5$, $\int_0^4 5dx = [\frac{1}{2}x^2]_0^4 = 20$
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)+g(x) = x+5$, $\int_0^4 (x+5)dx = [\frac{1}{2}x^2+5x]_0^4 = 28$

3. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

avec $k \in \mathbb{R}$

4. Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ et $a < c < b$ alors :
Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a;b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$, alors :

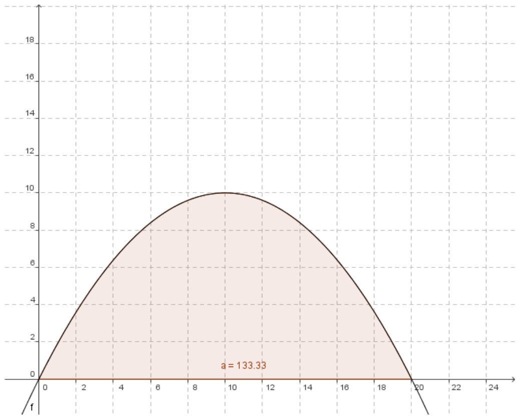
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2.4 Quelques utilisations des primitives et des intégrales :

2.4.1 Calculs d'aires

On sait qu'il y a un rapport entre l'aire et l'intégrale.
Prenons un exemple : la façade d'un gymnase de 20 mètres de large et de 10 mètres de haut peut mis en équation $h(x) = -0,1x^2 + 2x$ (équation d'une parabole)
La surface du mur extérieur est donc :

$$\mathcal{S} = \int_0^{20} h(x)dx = \frac{400}{3} = 133,33m^2$$



2.4.2 Applications à l'électricité

1. Circuit intégrateur
   C'est le cas de certains montage d'AOP (dont nous ne ferons pas le rappel ici).
   Si on a une tension créneau en entrée (V_e) on va obtenir une tension en dent de scie en sortie (V_s).
2. Calcul de la valeur moyenne :
   $$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
   exemple :
   $u(t) = U.\sqrt{2}.sin(\omega t)$ entre $0 < t < \frac{T}{2}$
   $u(t) = 0$ sur $\frac{T}{2} < t < T$ et on rappelle que $\omega T = 2.\pi$
   $\bar{u} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ devient ici $\bar{u} = \frac{1}{T-0}\int_0^T u(t)dt$
   On utilise alors les formules apprises en cours pour « découper »notre intégrale :
   $\bar{u} = \frac{1}{T-0}(\int_0^{\frac{T}{2}} U.\sqrt{2}.sin(\omega t).dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} 0.dt)$
   $\bar{u} == \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U.\sqrt{2}.sin(\omega t)dt + 0$
   $\bar{u} = \frac{1}{T}[-\frac{U.\sqrt{2}}{\omega}.cos(\omega t)]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{U.\sqrt{2}}{\omega.T}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{U.\sqrt{2}}{\pi}$
3. Calcul de la valeur efficace
   La valeur efficace d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ est notée F_{eff} et est donnée par

le relation :

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Dans le cas d'une tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_{max} sin(\omega t)$, si on fait le calcul sur l'intervalle $[0;T]$ cela donne :

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (U_{max}\sin(\omega.t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_{max}^2 \sin(\omega.t)^2 dt$$

or $(\sin \omega t)^2 = \frac{1-(\cos 2\omega t)}{2}$ donc :

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T U_{max}^2 \frac{1-(\cos 2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{U_{max}^2}{2T}\int_0^T (1-(\cos 2\omega t))dt \\ &= \frac{U_{max}^2}{2T}[(t - \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t))]_0^T \\ &= \frac{U_{max}^2}{2T}(T - \frac{1}{2\omega}\sin 4\pi) \end{aligned} \tag{1}$$

Il reste donc :

$$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$$